



عنوان مقاله:

بررسی مفهوم حد و پیوستگی توابع

چکیده مقاله:

حد و پیوستگی توابع از مباحث پایه ریاضیات و پیش‌نیاز یادگیری مباحثی مانند مشتق، انتگرال و ... است؛ و همچنین از جمله مباحثی است که در حل مسائل فیزیک نیز کاربرد دارد. در این مقاله به بررسی مفهوم حد و پیوستگی توابع به‌طور جامع می‌پردازیم.

از مجموع مقالات آکادمی نیک درس

[لینک دسترسی به این مقاله در وب سایت آکادمی نیک درس](#)

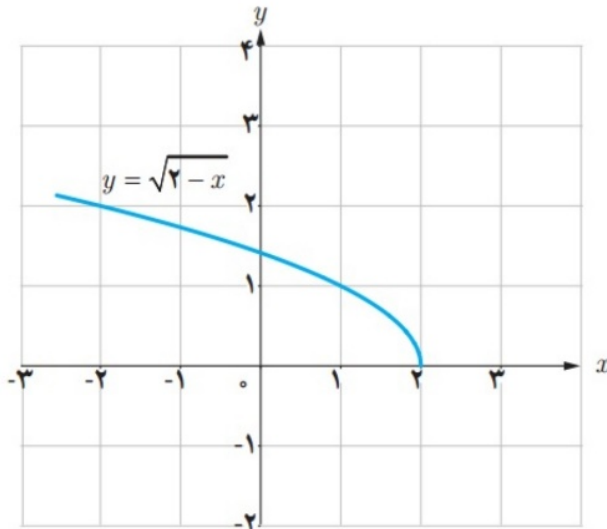
در ابتدا برای درک مبحث حد و پیوستگی توابع موضوع همسایگی را بررسی می‌کنیم:

همسایگی a : هر بازه باز عددی که a عضوی از آن بازه باشد همسایگی a گویند؛ مثلاً بازه $(-۱۵, ۹)$ همسایگی عدد ۲ است؛ زیرا که عدد ۲ عضوی از این بازه است.

همسایگی راست a : بازه (a, b) را همسایگی راست a گویند و با a^+ (می‌خوانیم a مثبت) نشان می‌دهند به‌طور مثال بازه $(۲, ۹)$ همسایگی راست ۲ است. (اگر این بازه عددی خیلی کوچک باشد همسایگی نزدیک راست می‌گویند)

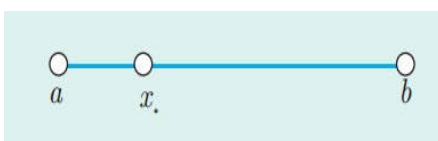
همسایگی چپ a : بازه (c, a) را همسایگی چپ a گویند و با a^- (می‌خوانیم a منفی) نشان می‌دهند به‌طور مثال بازه $(-۱۵, ۲)$ همسایگی چپ ۲ است. (اگر این بازه عددی خیلی کوچک باشد همسایگی نزدیک چپ می‌گویند).

مثال: در شکل زیر بازه $(-۲, ۱)$ همسایگی نقطه $x=0$ است، همچنین بازه $(۰, ۲)$ همسایگی راست و بازه $(-۲, ۰)$ همسایگی چپ این نقطه هستند.



همسایگی محذوف: اگر یک بازه عددی از اعداد حقیقی داشته باشیم یک عضو از آن را حذف کنیم باقیمانده را همسایگی محذوف آن عضو می‌نامند. به‌طور مثال اگر عدد ۳ را از بازه $(-۸, ۱۵)$ حذف کنیم، باقیمانده آن مجموعه $\{3\}(-۸, ۱۵)$ می‌شود، به آن همسایگی محذوف ۳ می‌گویند.

مثال: در شکل روبه‌رو بازه $\{x\}-(a, b)$ همسایگی محذوف عدد x است.



در ادامه مبحث حد و پیوستگی توابع سراغ موضوع حد می‌رویم. این موضوع را با یک مثال شروع می‌کنیم؛ فرض بگیرید یک شیء مستطیل شکل داریم که طول آن ۵ سانتی‌متر ثابت ولی عرض آن بین اعداد ۰,۵ تا ۱,۵ سانتی‌متر متغیر است مساحت این شیء با عرض‌های مختلف به شکل زیر است:

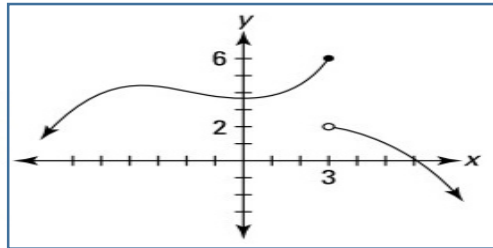
عرض	۰,۵	۰,۶	۰,۷	۰,۸	۰,۹	۱	۱,۱	۱,۲	۱,۳	۱,۴	۱,۵
مساحت	۲,۵	۳	۳,۵	۴	۴,۵	۵	۵,۵	۶	۶,۵	۷	۷,۵

با توجه به ثابت بودن طول می‌توان مساحت شیء را به صورت یک تابع $f(x) = 5x$ = مساحت (که x عرض شیء است) نوشت. وقتی از مقادیر بیشتر از 1^+ به عدد ۱ نزدیک می‌شویم می‌بینیم که مقدار تابع به ۵ نزدیک می‌شود به عدد ۵ حد تابع راست تابع گویند. (به بیان ریاضی $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 5$ ← می‌خوانیم حد راست $f(x)$ وقتی تابع به سمت یک میل می‌کند می‌شود ۵). همچنین وقتی از مقادیر کمتر از 1^- به عدد ۱ نزدیک می‌شویم می‌بینیم که مقدار تابع مجدد به عدد ۵ نزدیک می‌شود؛ پس حد چپ تابع نیز ۵ می‌شود (به بیان ریاضی $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 5$ ← می‌خوانیم حد چپ تابع $f(x)$ وقتی به سمت ۱ میل می‌کند می‌شود ۵). با توجه به اینکه حد چپ و راست تابع برابر است پس حد تابع وقتی به سمت ۱ میل می‌کند می‌شود ۵. (یا به بیان ریاضی $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$ ← می‌خوانیم حد $f(x)$ وقتی به سمت ۱ میل می‌کند می‌شود ۵).

- ❖ اگر حد چپ و راست تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ برابر نباشد می‌گوییم تابع در این نقطه حد ندارد.
- ❖ گاهی ممکن است تابع در یک نقطه همسایگی چپ یا راست نداشته باشد، یعنی تابع فاقد دامنه در همسایگی چپ یا راست آن نقطه باشد، در چنین مواردی تابع فقط حد راست یا چپ دارد. مثال: تابع \sqrt{x} در نقطه $x=0$ فقط حد راست دارد. (چون اعداد منفی نمی‌توانند در زیر رادیکال قرار بگیرند پس نقطه صفر همسایگی چپ ندارد و حد چپ نیز ندارد).

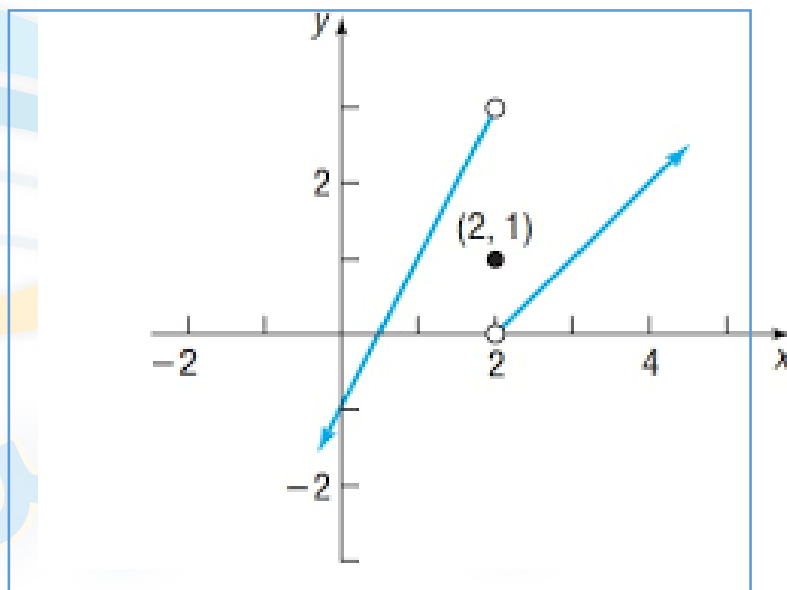
اکنون برای درک بهتر موضوع چند مثال را باهم بررسی می‌کنیم:

مثال ۱: بررسی حد تابع در نقطه $x=3$



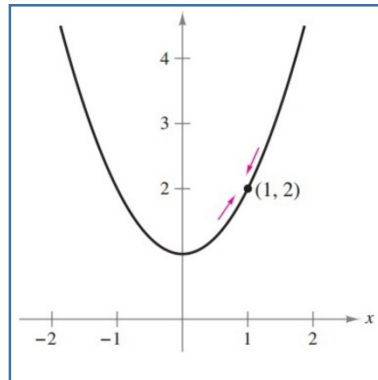
با بررسی رفتار تابع در همسایگی راست نقطه $x=3$ می بینیم که مقدار تابع به عدد ۲ نزدیک می شود؛ در نتیجه حد راست تابع ۲ است. $(\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2)$ و وقتی رفتار تابع در سمت چپ $x=3$ بررسی می کنیم می بینیم با نزدیک شدن تابع به نقطه $x=3$ مقدار تابع به سمت ۶ میل می کند؛ پس حد چپ تابع در نقطه $x=3$ برابر ۶ است $(\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 6)$ با توجه به اینکه حد چپ و راست با هم $x=3$ با هم برابر نیست پس تابع در این نقطه حد ندارد.

مثال ۲: بررسی حد تابع در نقطه $x=2$



وقتی در همسایگی راست عدد $x=2$ به این عدد نزدیک می شویم می بینیم که مقدار تابع به سمت صفر میل می کند یعنی حد راست تابع صفر است $(\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 0)$ ؛ وقتی در همسایگی چپ $x=2$ به این نقطه نزدیک می شویم مقدار تابع به سمت ۳ میل می کند، یعنی حد چپ تابع برابر ۳ است $(\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3)$. با توجه به اینکه حد چپ و راست تابع برابر نیست تابع در نقطه $x=2$ حد ندارد.

مثال ۳: بررسی حد تابع در نقطه $x=1$



وقتی در همسایگی راست نقطه $x=1$ (1^+) به این نقطه نزدیک می‌شویم مقدار تابع به سمت ۲ میل می‌کند یعنی حد راست تابع در این نقطه ۲ است و وقتی در همسایگی چپ نقطه $x=1$ (1^-) به این نقطه نزدیک می‌شویم مقدار تابع مجدد به سمت ۲ میل می‌کند؛ یعنی حد چپ تابع در این نقطه نیز ۲ است؛ با توجه به این که حد چپ و راست تابع در این نقطه برابر است پس حد تابع در این نقطه می‌شود ۲. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

در انتهای مبحث حد و پیوستگی توابع، مبحث پیوستگی را بررسی می‌کنیم:

وقتی صحبت از پیوسته بودن تابع در یک نقطه می‌شود یعنی می‌توان نمودار تابع در آن نقطه را بدون برداشتن قلم از روی کاغذ رسم کرد؛ از نظر ریاضی برای اینکه تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ پیوسته باشد دو شرط وجود دارد: شرط اول اینکه تابع در این نقطه حد داشته باشد یعنی حد چپ و راست تابع در نقطه $x=a$ برابر باشد ($\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$)؛ شرط دوم اینکه حد تابع وقتی به سمت $x=a$ میل می‌کند با مقدار $f(a)$ برابر باشد. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

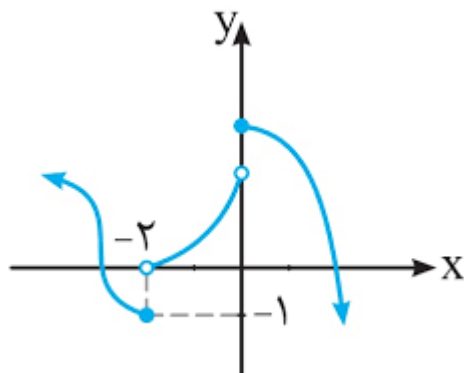
برای درک بهتر موضوع پیوستگی تابع چند مثال را بررسی می‌کنیم:

مثال ۱: بررسی پیوستگی تابع در نقطه $x=-2$ ابتدا بررسی می‌کنیم ببینیم که آیا تابع در نقطه $x=-2$ حد دارد یا خیر.

در همسایگی راست نقطه $x=-2$ ، وقتی به این نقطه نزدیک می‌شویم تابع به سمت صفر میل می‌کند، پس حد راست تابع در این نقطه صفر است ($\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0$).

وقتی در همسایگی چپ نقطه $x=-2$ به این نقطه نزدیک می‌شویم مقدار تابع به سمت -1 میل می‌کند پس حد چپ تابع در نقطه برابر -1 است. ($\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -1$)

چون حد چپ و راست تابع در این نقطه برابر نیست پس تابع در این نقطه حد ندارد و شرط اول پیوسته بودن تابع برقرار نیست، پس تابع در نقطه $x=-2$ پیوسته نیست.



مثال ۲: بررسی پیوستگی تابع در نقطه $x=1$

ابتدا بررسی می‌کنیم که آیا تابع در نقطه $x=2$ حد دارد یا خیر. در همسایگی راست نقطه $x=1$ وقتی به سمت این نقطه

نزدیک می‌شویم مقدار تابع به سمت ۲ میل می‌کند. ($\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$) و در همسایگی چپ

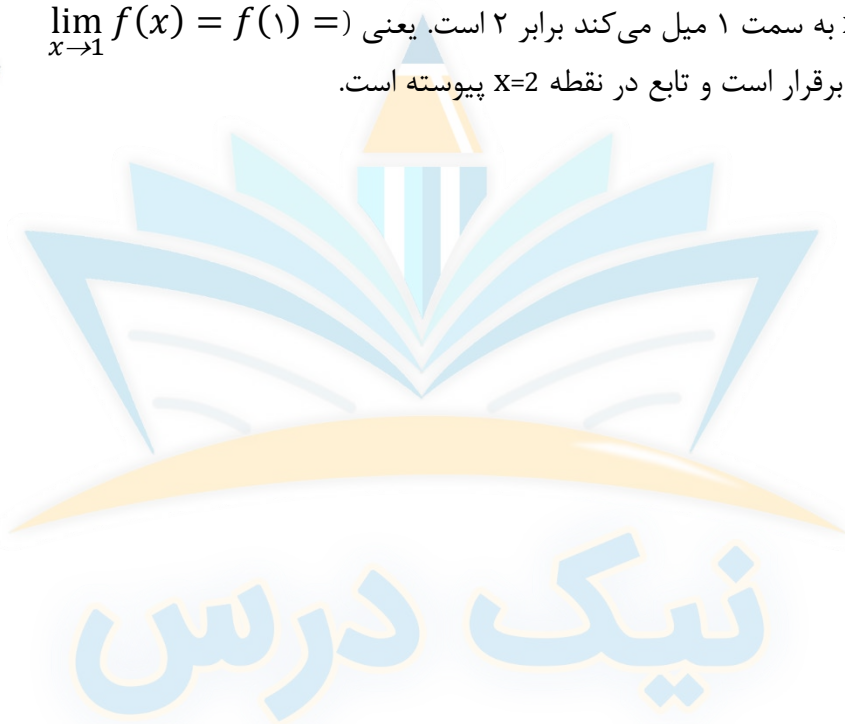
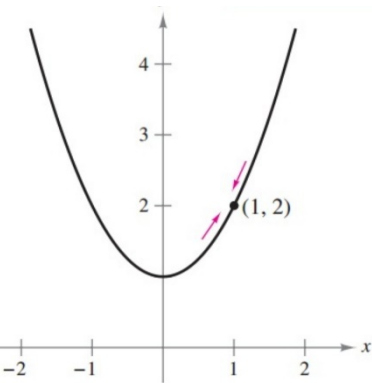
وقتی به این نقطه نزدیک می‌شویم مقدار تابع به سمت ۲ میل می‌کند ($\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$)؛ یعنی

حد چپ و راست تابع در این نقطه برابر است؛ پس حد تابع وقتی به سمت ۱ میل می‌کند برابر ۲ است. ($\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$) پس شرط اول پیوستگی در این حد داشتن تابع در این نقطه

برقرار است. اما سراغ شرط دوم می‌رویم؛ مقدار تابع در نقطه $x=1$ برابر ۲ است و با توجه به

اینکه حد تابع وقتی x به سمت ۱ میل می‌کند برابر ۲ است. یعنی ($\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$)

(۲) پس شرط دوم نیز برقرار است و تابع در نقطه $x=2$ پیوسته است.



عنوان مقاله:

بررسی مفهوم حد و پیوستگی توابع

نتیجه گیری:

حد و پیوستگی توابع از مباحث پایه‌ای ریاضی است و درک مفهوم آن به یادگیری بسیاری از مباحث ریاضی کمک می‌کند. منظور از حد تابع در نقطه $x=a$ بررسی رفتار تابع پیرامون این نقطه است یعنی بررسی می‌کنیم که وقتی روی محور x ها به این نقطه از سمت چپ و راست نزدیک می‌شویم مقدار تابع (نمودار Y) به سمت چه عددی میل می‌کند. (وقتی از سمت راست به $x=a$ نزدیک می‌شویم عددی که مقدار تابع (نمودار Y) به سمت آن میل می‌کند حد راست و وقتی از سمت چپ به $x=a$ نزدیک می‌شویم عددی که مقدار تابع (نمودار Y) به سمت آن میل می‌کند حد چپ خواهد بود.) در صورتی که حد چپ و راست در نقطه $x=a$ برابر باشد؛ می‌گوییم تابع در آن نقطه حد دارد؛ در غیر این صورت تابع در آن نقطه فاقد حد خواهد بود.

آخرین مبحث از موضوع حد و پیوستگی توابع، مفهوم پیوستگی توابع است؛ زمانی ما می‌توانیم تابع $f(x)$ را در نقطه $x=a$ پیوسته بدانیم، اول اینکه تابع در این نقطه حد داشته باشد یعنی حد چپ و راست تابع در این نقطه برابر باشد

$$(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)) \text{ و } (\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x))$$

از مجموع مقالات آکادمی نیک درس

[لینک دسترسی به این مقاله در وب سایت آکادمی نیک درس](#)

آکادمی نیک درس، در انتهای تابستان ۱۴۰۰ فعالیت خود را باهدف انتقال تجربه مدرسین در حوزه‌های مختلف از جمله دروس مدرسه و دانشگاه (تمامی رشته‌ها و تمامی مقاطع)، دروس حوزه علمیه، مهارت‌های بازار کار، هنر، صنعت، آشپزی، نرم‌افزارهای کاربردی و ... باکیفیت مطلوب جهت سربلندی کشور اسلامی عزیزمان ایران، آغاز نموده است.

تلاش شبانه‌روزی همکاران ما در آکادمی نیک درس جهت ارائه خدمات آموزش باکیفیت و مطلوب، باقیمتی پایین جهت پیش برد اهداف از قبل تعیین شده از جمله تحقق عدالت آموزشی، دسترسی آسان و باکیفیت به آموزش‌های متنوع در زمینه‌های گوناگون برای اقشار مختلف جامعه در استان‌ها، شهرها و روستاها و حتی در مناطق کمتر برخوردار می‌باشد.

امید است که با معرفی آکادمی نیک درس به دوستان و آشنایان خود، ما را جهت پیشبرد این اهداف یاری نمایید.

در صورت تمایل به تدریس و یا تمایل به نویسندگی مقالات در آکادمی نیک درس،
مهارت‌های خود را در [فرم همکاری با ما](#) در آکادمی نیک درس، ثبت نمایید.



www.NikDars.com